

Aufgaben aus der analytischen Geometrie

von

Paul Droysen,

Professor am Gymnasium zu Belgard a. Pers.

Beilage zum Jahresbericht des städtischen Gymnasiums zu Belgard a. Pers.



Leipzig

Buchhandlung Gustav Fock, G. m. b. H.

1909. Progr.-Nr. 192.

Die nachstehende Arbeit bringt wesentlich nichts Neues; sie soll nur dem Schüler Übungsstoff liefern. Deshalb sind die Lösungen, bezw. auch der Gang der Lösungen hinzugefügt; auch sind die Beispiele so gewählt, daß die Rechnung sich möglichst einfach gestaltet.

Es sind nur rechtwinklige Koordinaten benutzt, die ja wohl in der Prima des Gymnasiums hauptsächlich nur zur Anwendung kommen.

Der Punkt.

1. Bestimme die Lage der Punkte, deren Koordinaten sind: $P_1: x = +5, \ y = +2$. $P_2: x = +2, \ y = -3$. $P_3: x = -4, \ y = +2$. $P_4: x = -5, \ y = -3$, $P_5: x = 0, \ y = -3$. $P_6: x = +4, \ y = 0$.

2. Die Entfernung der beiden Punkte $x_1 \, y_1$ und $x_2 \, y_2$ ist $e = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Welche Entfernung haben also die Punkte:

$P_1: +4, +7$ und $P_2: +1, +3$?

Antw.: $P_1 P_2 = 5$.

$P_3: +4, -5$ und $P_4: -4, +10$?

Antw.: $P_3 P_4 = 17$.

3. Die Ecken eines Dreiecks sind a) A: + 15, + 20; B: − 5, + 5; C: + 7, + 5. b) A: + 10, + 2; B: + 5, + 14; C: − 4, + 2. c) A: + 9, + 7; B: 0, − 5; C: + 4, − 5. d) A: + 9, + 7; B: − 3, + 2; C: + 1, − 1. Wie lang sind die Seiten?

Antw.: a) AB = 25, AC = 17, BC = 12. b) AB = 13, AC = 14, BC = 15. c) AB = 15, AC = 13, BC = 4. d) AB = 13, AC = $8\sqrt{2}$, BC = 5.

4. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $F = \pm \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$, wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks in Nr. 3?

Antw.: $F_1 = 90$; $F_2 = 84$; $F_3 = 24$; $F_4 = 28$.

5. Drei Punkte liegen also in einer Geraden, wenn F = 0 ist, d. h. wenn $x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$ ist.

Welche der folgenden drei Punkte liegen in einer Geraden?

a) 15, 21; 7, 6; − 1, − 9. b) 7, − 4; 8, 1; 2, − 2. c) 4, 0; 0, 3; 9, 3. d) 9, 3; 1, − 3; 5, 0.

Antw.: a, c und d liegen in einer Geraden; für b ist F = 13, 5. b) Die Verbindungslinie der Punkte $x_1 \, y_1$ und $x_2 \, y_2$ soll im Verhältnis m : n geteilt werden. Welches sind die Koordinaten des Teilpunktes?

Antw.: $x = \frac{n x_1 + m x_2}{m + n}$, $y = \frac{n y_1 + m y_2}{m + n}$.

Die Entfernung der Punkte 8, 7 und 3, − 3 soll im Verhältnis 3 : 2 geteilt werden. Antw.: Der Teilpunkt ist 5, 1.

Welches ist der Halbierungspunkt der Strecke von 7, − 5 bis − 3, 5? Antw.: 2, 0.

7. Drei Ecken eines Parallelogrammes sind A: 2, 3; B: 5, 4; D: 3, 5. Welches ist der Halbierungspunkt E der Diagonale BD? Wo liegt C?

Antw.: E: 4, $4\frac{1}{2}$; C: 6, 6.

Wo liegt die vierte Ecke, wenn BD nicht Diagonale, sondern Seite des Parallelogramms wird?

Antw.: Entweder C: 4, 2 oder C: 0, 4.

8. Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $x_1 \, y_1$, $x_2 \, y_2$, $x_3 \, y_3$?

Antw.: Der Schwerpunkt teilt die Strecke zwischen den Punkten $x_1 \, y_1$ und $\frac{x_2 + x_3}{2}$, $\frac{y_2 + y_3}{2}$ im Ver-

hältnis 2 : 1, also ist

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Welches ist demnach der Schwerpunkt des Dreiecks 11, 5; — 7, 2; 2, — 1? Antw.: 3, 3.

Die Gerade.

1. Die Gleichung der Geraden hat entweder die Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, wo a und b die Abschnitte auf den Achsen sind, oder die Form $y = mx + \mu$, wo m die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Gerade mit der positiven Richtung der X=Achse bildet, und μ der Abschnitt auf der Y=Achse ist. Die Gleichung $Ax + By + C = 0$ läßt sich auf beide Formen bringen, entweder $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$ oder $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Also stellt jede Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten eine Gerade dar.

Man zeichne folgende Linien: a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$; $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ oder $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$; $\frac{4x}{3} + \frac{5y}{2} = 1$ oder $\frac{x}{\frac{3}{4}} + \frac{y}{\frac{2}{5}} = 1$; $-\frac{x}{8} - \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{7} + \frac{y}{5} = 1$.

b) $y = 2x + 5$; $y = -3x + 2$; $y = \frac{1}{2}x - 3$; $y = \frac{3}{5}x$; $y = -\frac{1}{2}x$; $y = x$; $y = -x$.

c) $3x + 5y - 2 = 0$, woraus entweder $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{2}{5}} = 1$ oder $y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$; $4x - 2y = 3$; $-2x + 5y = 6$; $x + y = 1$; $x - y = 1$.

Man gebe auch ohne Zeichnung sofort an, welchen Quadranten die Gerade durchschneidet bezw. abschneidet.

2. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $x_1\ y_1$ geht?

Antw.: Soll die Gerade $y = mx + \mu$ durch den Punkt gehen, so muß auch $y_1 = mx_1 + \mu$ sein, woraus $y - y_1 = m(x - x_1)$ folgt.

3. Wie heißt die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$?

Antw.: Da auch $y_1 = mx_1 + \mu$ und $y_2 = mx_2 + \mu$ sein muß, so folgt

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

4. Wie heißt die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte
5, 8 und 3, 2 geht? Antw.: $y = 3x - 7$.
1, 1 „ 2, 2 „ ? „ $y = x$.
7, 3 „ 5, 6 „ ? „ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{27}{2}$.
— 3, 4 u. 2, — 5 geht? „ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{52}{5}$.

5. Die Ecken eines Dreiecks sind A: 6, 6; B: — 4, 3; C: 9, — 3. Wie heißen die Gleichungen der Seiten?

Antw.: AB: $y = \frac{3}{10}x + \frac{21}{5}$; AC: $y = -3x + 24$; BC: $y = -\frac{6}{13}x + \frac{15}{13}$.

b) A: 1, 8; B: — 2 — 1; C: 22, — 13?

Antw.: AB: $y = 3x + 5$; AC: $y = -x + 9$; BC: $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

c) A: 0, 4; B: — 2, 0; C: — 8, 12?

Antw.: AB: $y = 2x + 4$; AC: $y = -x + 4$; BC: $y = -2x - 4$. Wie heißen die Mittellinien?

m_a: $y = -\frac{2}{5}x + 4$; m_b: $y = -4x - 8$;

m_c: $y = -\frac{10}{7}x + \frac{4}{7}$.

6. In welchem Punkte schneiden sich die Geraden $y = ax + \alpha$ und $y = bx + \beta$?

Antw.: $x_1 = -\frac{\alpha - \beta}{a - b}$ $y_1 = \frac{a\beta - b\alpha}{a - b}$.

7. Unter welcher Bedingung schneiden sich die drei Geraden $y = ax + \alpha$, $y = bx + \beta$ und $y = cx + \gamma$ in einem Punkte?

Antw.: Wenn die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden der Gleichung der dritten genügen,

woraus sich ergibt $a(\beta-\gamma)+b(\gamma-\alpha)+c(\alpha-\beta)=0$.

8. Welchen Winkel bilden die Geraden $y=ax+\alpha$ und $y=bx+\beta$ mit einander? Ist a die Tangente des Winkels φ_1, den die Gerade AZ mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, b die Tangente des Winkels φ_2 der Geraden BU und $\varphi_1>\varphi_2$, so ist $UPZ=\vartheta$ der Winkel der beiden Geraden. Da APB als Scheitelwinkel gleich ϑ ist, so ist $\varphi_1=\vartheta+\varphi_2$ als Außenwinkel, oder $\vartheta=\varphi_1-\varphi_2$. Hieraus folgt $tg\vartheta=tg(\varphi_1-\varphi_2)=$

$$\frac{tg\varphi_1-tg\varphi_2}{1+tg\varphi_1\,tg\varphi_2}=\frac{a-b}{1+ab}.$$

Es ist falsch, den Winkel BPZ als den Winkel der beiden Geraden zu bezeichnen. Winkel BPZ ist sein Supplement. Es ist demnach darauf zu achten, daß der größere der beiden Winkel φ die Stelle φ_1 erhält, denn nur dieser kann der Außenwinkel des Dreiecks der beiden Geraden mit der X-Achse sein.

Welche Bedeutung hat der Ausdruck $tg\vartheta=\frac{a-b}{1+ab}$, a) wenn der Zähler den Wert Null hat, b) wenn der Nenner gleich Null ist?

Antw.: Ist $a-b=0$ oder $a=b$, so sind die beiden Geraden parallel, ist $1+ab=0$ oder $b=-\frac{1}{a}$, so stehen sie aufeinander senkrecht.

9. Welchen Abstand hat der Punkt $x_1\ y_1$ von der Geraden $y=ax+\alpha$?

Antw.: $p=\pm\frac{ax_1+\alpha-y_1}{\sqrt{a^2+1}}$.

10. Durch den Punkt 9,4 soll die Parallele gezogen werden zu der Geraden $y=2x-7$. Wie heißt die Gleichung?

Antw.: $y=2x-14$.

Durch $-4, 3$ zu $y=\frac{1}{2}x-5$? Antw.: $y=\frac{1}{2}x+5$;
„ $2, -7$ „ $y=-x+4$? „ $y=-x-5$;
„ $-5, -3$ „ $y=\frac{3}{5}x-6$? „ $y=\frac{3}{5}x$.

11. Wie heißt die Gleichung der Senkrechten durch P (3, 5) zu $y=\frac{3}{4}x-5$?

Antw.: $y=-\frac{4}{3}x+9$;

durch $7, -2$ zu $y=2x-4$?

Antw.: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$;

durch $2, -8$ zu $y=-\frac{2}{3}x+6$?

Antw.: $y=\frac{3}{2}x-11$;

durch $3, -5$ zu $y=\frac{3}{5}x$?

Antw.: $y=-\frac{5}{3}x$.

12. Die Ecken eines Dreiecks sind A: 1,6; B: 3,—4; C: 5,2; Wie heißen die Gleichungen der Seiten, der Höhen?

Antw.: BC: $y=3x-13$; AC: $y=-x+7$; AB: $y=-5x+11$; h_a: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{19}{3}$; h_b: $y=x-7$; h_c: $y=\frac{1}{5}x+1$. Schnittpunkt der Höhen 10,3.

13. Die Seiten eines Dreiecks sind BC: $y=\frac{1}{16}x+\frac{9}{4}$, AC: $y=-\frac{2}{3}x+10$, AB: $y=\frac{1}{2}x+4$. Wie heißen die Gleichungen der Höhen? Welches ist ihr Schnittpunkt?

Antw.: h_a: $y=-16x+103$, h_b: $y=\frac{5}{2}x+8$, h_c: $y=-2x+27$; Schnittpunkt $\frac{38}{7}, \frac{113}{7}$.

14. Die Seiten eines Dreiecks sind: BC: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, AC: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{26}{3}$, AB: $y=3x+4$. Wie heißen die Mittelsenkrechten? Welches ist ihr Schnittpunkt?

Antw.: p_a: $y=2x-7$, p_b: $y=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}$, p_c: $y=-\frac{1}{3}x+4$. M.: $\frac{33}{7}, \frac{17}{7}$.

15. Welchen Abstand vom Koordinatenanfangspunkt hat die Gerade, welche durch die Punkte $-11, 23$ und $13, -9$ geht?

Antw.: $p=5$.

16. Durch den Punkt 20, 17 soll eine Gerade gezogen werden, die vom Anfangspunkt den Abstand $p = 8$ hat.

Antw.: Die beiden Geraden $y = \frac{45}{28}x + \frac{106}{7}$ und $y = \frac{5}{12}x + \frac{26}{5}$.

17. Durch den Punkt 0, —7 soll eine Senkrechte zu der Geraden $y = -\frac{4}{3}x + 12$ gezogen werden. Welchen Abstand hat der Punkt —4, 5 von der Senkrechten?

Antw.: $p = 12$.

18. Welchen Winkel bilden die Geraden $y = 4x - 5$ und $y = 2x + 4$?

Antw.: $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{4-2}{1+8} = \frac{2}{9}$; $\vartheta = 12^0\,31'\,44''$.

Die Geraden $y = x - 5$ und $y = -2x + 7$?

Antw.: $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{-2-1}{1-2} = 3$; $\vartheta = 71^0\,33'\,54''$.

Die Geraden $y = -\frac{1}{2}x + 5$ und $y = -\frac{2}{3}x - 7$?

Antw.: $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{8}$; $\vartheta = 7^0\,7'\,30''$.

19. Gegeben sind die Gerade $y = x$ und die Punkte $P_1: 2, 4$ und $P_2: 6, 10$. Auf der Geraden soll der Punkt P bestimmt werden, dessen Strahlen nach P_1 und P_2 gleiche Winkel mit der Geraden bilden.

Antw.: Die beiden Punkte liegen auf derselben Seite der Geraden, also schneidet die Linie, welche den Spiegelpunkt des einen Punktes mit dem andern Punkte verbindet, die Gerade in dem gesuchten Punkte. Der Schnittpunkt ist $\frac{14}{3}$, $\frac{14}{3}$, die Strahlen $y = 4x - 14$ und $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$; $\vartheta = 30^0\,57'\,50''$.

20. Welches sind die Winkel eines Dreiecks?

Antw.: Die drei Seiten seien $y = ax + \alpha$, $y = bx + \beta$ und $y = cx + \gamma$ und die Winkel der Richtungskonstanten a, b, c der Reihe nach φ_1, φ_2, φ_3, während α, β, γ die Winkel des Dreiecks sind. Zeichnet man Dreiecke der verschiedensten Formen und in den verschiedensten Lagen, so ersieht man, daß zwei der Dreieckswinkel die direkten Winkel der Geraden, der dritte dagegen das Supplement des dritten direkten Winkels ist. Ist der von $y = bx + \beta$ und $y = cx + \gamma$ gebildete Winkel α der direkte Winkel, also $\varphi_2 > \varphi_3$, so ist β oder γ als Supplementwinkel zu nehmen, je nachdem $\varphi_1 > \varphi_2$ oder $\varphi_1 < \varphi_3$ ist.

Es sei BC: $y = -\frac{1}{2}x + 4$, AC: $y = -\frac{2}{3}x + 4$, AB: $y = \frac{1}{2}x + 5$, so ist $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{2}$, also ist β der Supplementwinkel.

Die drei Winkel sind $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{7}{4}$, $\alpha = 119^0\,44'\,41''$; $\operatorname{tg}\beta' = \dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$, $\beta = 53^0\,7'\,49''$; $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{8}$, $\gamma = 7^0\,7'\,30''$.

21. Wie heißt die Gleichung der Winkelhalbierenden der beiden Geraden $y = ax + \alpha$ und $y = bx + \beta$?

Antw.: Die Gleichung der Winkelhalbierenden hat die Form $y = cx + \gamma$, und zwischen den Winkeln φ_1, φ_2 und φ, welche die 3 Geraden mit der X-Achse bilden, gilt die Beziehung $\varphi_1 - \varphi = \varphi - \varphi_2$. Hieraus ergibt sich $\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)$,

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_2} \text{ oder}$$

$$\frac{a-c}{1+ac} = \frac{c-b}{1+bc}, \text{ also}$$

$$c^2(a+b) - 2c(ab-1) - (a+b) = 0,$$

$$c = \frac{ab - 1 \pm \sqrt{(ab-1)^2 + (a+b)^2}}{a+b} = \frac{ab - 1 \pm \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}.$$

Das Minuszeichen der Wurzel gilt, wenn a oder b negativ ist, denn, wenn die Tangente negativ ist, der Winkel also im zweiten Quadranten liegt, so ist auch der Kosinus negativ.

γ ergibt sich daraus, daß die drei Geraden durch einen Punkt gehen, also $a(\beta - \gamma) + b(\gamma - \alpha) + c(\alpha - \beta) = 0$ ist. Es ist

$$\gamma = \frac{c(\alpha - \beta) + a\beta - b\alpha}{a - b} =$$

$$\frac{\frac{ab - 1 + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}(\alpha - \beta) + a\beta - b\alpha}{a - b}$$

$$\gamma = \frac{(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{b^2+1})(\beta\sqrt{a^2+1} + \alpha\sqrt{b^2+1})}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{b^2+1})(\alpha\sqrt{b^2+1} + \beta\sqrt{a^2+1})}{\sqrt{(a^2+1)^2} - \sqrt{(b^2+1^2)}}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\sqrt{b_2+1} + \beta\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a_2+1} + \sqrt{b^2+1}}.$$

Wird der Ausdruck für c in gleicher Weise umgeformt, so erhält man

$$c = \frac{a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}}; \text{ also ist}$$

$$y = \frac{a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}}\,x$$

$$+ \frac{\alpha\sqrt{b^2+1} + \beta\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}}; \text{ oder auch}$$

$$\frac{ax + \alpha - y}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{bx + \beta - y}{\sqrt{b^2+1}} = 0.$$

Wird a negativ, so wird auch $\sqrt{a^2+1}$ negativ, also erhält man

$$\frac{-ax + \alpha - y}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{bx + \beta - y}{\sqrt{b^2+1}} = 0.$$

Für die Halbierungslinie des Supplementwinkels gilt $\varphi - \varphi_1 = 180 - \varphi + \varphi_2$. Eine gleiche Rechnung ergibt für die Halbierungslinie

$$\frac{ax + \alpha - y}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{bx + \beta - y}{\sqrt{b^2+1}} = 0,$$

und wenn a negativ ist

$$\frac{-ax + \alpha - y}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{bx + \beta - y}{\sqrt{b^2+1}} = 0.$$

22. Wie heißt die Winkelhalbierende der beiden Geraden $y = \frac{3}{4}x - 5$ und $y = \frac{5}{12}x + 4$?

Antw.: $$\frac{\frac{3}{4}x - 5 - y}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{12}x + 4 - y}{\frac{13}{12}} = 0,$$

$$y = \frac{4}{7}x - \frac{5}{28};$$

der Geraden $y = -\frac{4}{3}x + 5$ und $y = \frac{12}{5}x + 5$?

Antw.: $$\frac{-\frac{4}{3}x + 5 - y}{\frac{5}{3}} - \frac{\frac{12}{5}x + 5 - y}{\frac{13}{5}} = 0,$$

$$y = -8x + 5;$$

der Geraden $y = -\frac{12}{5}x + 12$ und $y = \frac{3}{4}x + 9$?

Antw.: $$\frac{-\frac{12}{5}x + 12 - y}{\frac{13}{5}} - \frac{\frac{3}{4}x + 9 - y}{\frac{5}{4}} = 0,$$

$$y = \frac{11}{3}x + \frac{56}{9}.$$

23. Die Seiten eines Dreiecks sind $BC: y = \frac{1}{8}x + 3$, $AC: y = -\frac{5}{6}x + 12$, $AB: y = 3x - 6$. Welches sind die Winkel des Dreiecks?

Antw.: $$tg\alpha = \frac{-\frac{5}{6} - 3}{1 - \frac{5}{2}} = \frac{23}{9},\ \alpha = 68^0 37' 46'',$$

$$tg\beta = \frac{3 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{23}{11},\ \beta = 64^0\ 26'\ 24'',$$

$$tg(2R - \gamma) = \frac{-\frac{5}{6} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{5}{48}} = -\frac{46}{43},\ \gamma = 46^0 55' 50''.$$

24. Die Seiten eines Dreiecks sind $BC: y = -\frac{3}{4}x - \frac{50}{4}$, $AC: y = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$, $AB: y = \frac{24}{7}x + \frac{250}{7}$. Wie heißen die Gleichungen der Winkelhalbierenden?

Welche Entfernung hat ihr Schnittpunkt von den Seiten (wie groß ist ϱ)?

Antw.: $\omega_a : y = -\frac{11}{2}x$, $\omega_b : y = \frac{1}{3}x$, $\omega_c : y = -x$; Schnittpunkt 0,0; $\varrho = 10$.

25. Die Ecken eines Dreiecks sind A : 0,2; B : $-\frac{7}{4}, \frac{11}{16}$; C : $\frac{9}{2}, -4$. Welches sind die Seiten, die Winkel, die Höhen, die Mittellinien, die Winkelhalbierenden? Es ist zu zeigen, daß sie sich in einem Punkte schneiden. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Antw.: $BC : y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}$,

$$AC : y = -\frac{4}{3}x + 2, \quad AB : y = \frac{3}{4}x + 2;$$

$$\alpha = R, \ \mathrm{tg}\,\beta' = -\frac{24}{7}, \ \beta = 73^0\ 44'\ 22'',$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{7}{24}, \ \gamma = 16^0\ 15'\ 38''; \ h_a = \frac{4}{3}x + 2,$$

$$h_b = c = \frac{3}{4}x + 2, \ h_c = b = -\frac{4}{3}x + 2;$$

Schnittpunkt 0,2.

$$m_a : y = -\frac{117}{44}x + 2, \ m_b : y = -\frac{27}{64}x - \frac{13}{256},$$

$$m_c : y = -\frac{171}{172}x + \frac{163}{344};$$

sie schneiden sich in einem Punkte $\left(\frac{11}{12}, -\frac{7}{16}\right)$, denn

$$-\frac{117}{44}\left(-\frac{13}{256} - \frac{163}{344}\right) - \frac{27}{64}\left(\frac{163}{344} - 2\right) - \frac{171}{172}\left(2 + \frac{13}{256}\right) = 0;$$

$$\omega_a : y = 7x + 2, \ \omega_b : y = \frac{11}{16}, \ \omega_c : y = -x + \frac{1}{2};$$

Schnittpunkt $-\frac{3}{16}, \frac{11}{16}$;

sie schneiden sich in einem Punkt, denn

$$7\left(\frac{11}{16} - \frac{1}{2}\right) - 1\left(2 - \frac{11}{16}\right) = 0.$$

$$F = \pm\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{4}(-4-2) + \frac{9}{2}\left(2 - \frac{11}{16}\right)\right) = \frac{525}{64}.$$

26. Die drei Ecken eines Dreiecks sind 2, 4; 0, 0; 8, 0. Es ist zu zeigen, daß H (Höhenschnittpunkt), S (Schwerpunkt) und M (Mittelpunkt des Umkreises) auf einer Geraden liegen und daß HS : SM = 2 : 1 ist.

Antw.: Es ist $BC : y = 0$, $AC : y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$, $AB : y = 2x$; $h_a : x = 0$, $h_b : y = \frac{3}{2}x$, $h_c : y = -\frac{1}{2}x + 4$; Schnittpunkt 2, 3. $m_a : y = -2x + 8$, $m_b : y = \frac{2}{5}x$, $m_c : y = -\frac{2}{7}x + \frac{16}{7}$. Schnittpunkt $\frac{10}{3}, \frac{4}{3}$. $p_a : x = 4$, $p_b : y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$, $p_c : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Schnittpunkt 4, $\frac{1}{2}$.

$$\text{Es ist } 2\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2} - 3\right) + 4\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 0.$$

Also liegen die drei Schnittpunkte in einer Geraden, und es verhält sich HS : SM =

$$\left(\frac{10}{3} - 2\right) : \left(4 - \frac{10}{3}\right) = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 2 : 1.$$

27. Die Ecken eines Vierecks sind A : 5, 2, B : 3, 7, C : — 1, 4, D : — 3, — 2. Wie heißen die Gleichungen der Seiten? Welche Winkel bilden sie? Wie heißen die Gleichungen der Diagonalen, wo schneiden sie sich?, unter welchem Winkel?

$$AB : y = -\frac{5}{2}x + \frac{29}{2}, \ BC : y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4},$$

$$CD : y = 3x + 7, \ DA : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$\sphericalangle A = 94^0\ 45'\ 49''$, $\sphericalangle B\ 74^0\ 55'\ 53''$, $\sphericalangle C\ 145^0, 18'\ 18''$, $\sphericalangle D\ 45^0$.

Die Diagonalen $AC : y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$, $BD : y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$, ihr Schnittpunkt $\frac{7}{11}, \frac{38}{11}$ und $\sphericalangle E = 105^0\ 15'\ 18''$.

28. Zwei gegenüberliegende Ecken A und C eines Rhombus sind 6, 12 und 0, 0. Durch die Ecke A geht die Seite $y = -8x + 60$. Wie heißen die Gleichungen der Diagonalen? Welches sind die beiden anderen Eckpunkte des Rhombus? Wie lauten die Gleichungen der andern Seiten? Wie groß ist $\sphericalangle$ A? Die eine Diagonale geht durch 6, 12 und 0, 0, ihre Gleichung ist also $y = 2x$; die andere Diagonale

halbiert diese und steht auf ihr senkrecht. Sie geht also durch den Punkt 3, 6 und hat die Richtungskonstante $-\frac{1}{2}$, daher $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$. Ihr Schnittpunkt mit der Seite $y = -8x + 60$ ist 7, 4, also CD: $y = \frac{4}{7}x$; BC: $y = -8x$ und AB: $y = \frac{4}{7}x + \frac{60}{7}$. Der vierte Eckpunkt ist $-1, 8$ und der Winkel $A = 67^0\ 22'\ 48''$.

29. Gegeben sind die Geraden $y = \frac{4}{3}x - 12$ und $y = \frac{3}{4}x + 2$. Durch den Punkt $-1, -4$ soll eine Gerade gelegt werden, die mit den beiden gegebenen ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Welches sind die Ecken des Dreiecks? Wie groß die Winkel? Wie groß ist der Flächeninhalt?

Antw.: Das abgeschnittene Dreieck wird gleichschenklig, wenn der Winkel, den die Gerade von der Form $y = mx + \mu$ mit der ersten Geraden bildet, gleich dem Nebenwinkel des mit der zweiten Geraden gebildeten Winkels ist; also

$$\frac{m - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}m} = \frac{\frac{3}{4} - m}{1 + \frac{3}{4}m}, \text{ woraus } m = \pm 1.$$

Es gibt also 2 Gerade, $y = -x - 5$ und $y = x - 3$. Die Ecken sind 24,20; $-4, -1$; $3, -8$ bezüglich 24,20; 20,17; 27,24. Die Winkel des ersten Dreiecks sind $12^0\ 19'\ 2''$ und $83^0\ 50'\ 29''$, die des zweiten $167^0\ 40'\ 58''$ und $6^0\ 9'\ 31''$. $F_1 = \frac{343}{2}$, $F_2 = \frac{7}{2}$.

30. Gegeben sind die beiden Geraden $y = 5x + 7$ und $y = \frac{1}{5}x + 2\frac{1}{5}$. Von dem Punkte 6,7 sind auf die beiden Geraden die Senkrechten gefällt und deren Fußpunkte verbunden. Wie groß sind die beiden Dreiecke, welche dadurch entstehen?

Antw.: Die beiden Geraden schneiden sich im Punkte $-1, 2$, die Senkrechten $y = -\frac{1}{5}x + \frac{41}{5}$ und $y = -5x + 37$ schneiden die Geraden in den Punkten 3, 22 und $15, 5\frac{1}{5}$. $F_1 = 185\frac{3}{5}$, $F_2 = 82\frac{4}{5}$.

31. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von den Geraden $y = ax + \alpha$ und $y = bx + \beta$ gleiche Entfernung haben?

Antw.: Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist $p = \pm\frac{mx + \mu - y}{\sqrt{m^2 + 1}}$, also ergibt sich

$$\pm\frac{ax + \alpha - y}{\sqrt{a^2 + 1}} = \pm\frac{bx + \beta - y}{\sqrt{b^2 + 1}} \text{ oder}$$

$$\pm\frac{ax + \alpha - y}{\sqrt{a^2 + 1}} \mp \frac{bx + \beta - y}{\sqrt{b^2 + 1}} = 0$$

Die doppelten Vorzeichen hängen von den Richtungskonstanten a und b ab und sind voneinander unabhängig. Es ergeben sich also 4 Gleichungen, die aber nur 2 Gerade darstellen. Vergleicht man sie mit den Gleichungen für die Winkelhalbierenden, so zeigt sich, daß sie mit der Halbierungslinie des Winkels und der des Supplementwinkels zusammenfallen.

32. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei Geraden sich wie m : n verhalten?

Antw.: Wie vorher ergibt sich

$$\pm\frac{n(ax + \alpha - y)}{\sqrt{a^2 + 1}} \mp \frac{m(bx + \beta - y)}{\sqrt{b^2 + 1}} = 0$$

33. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze A des Dreiecks ABC, wenn BC festliegt und $\text{ctg}\,\beta + \text{ctg}\,\gamma = e$ (const) ist?

Antw.: Fällt die X-Achse mit BC zusammen und ist der Halbierungspunkt der Koordinatenanfangspunkt, so ist $\frac{\frac{1}{2}a - x}{y} + \frac{\frac{1}{2}a + x}{y} = e$ oder $y = \frac{a}{e}$

34. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn $BC = a$ und $\text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\gamma = d$ ist?

Antw.: Bei derselben Lage der Achsen wie vorher ist $\frac{\frac{1}{2}a - x}{y} - \frac{\frac{1}{2}a + x}{y} = e$ oder $y = -\frac{2}{e}x$.

35. Welches ist der Ort des Höhenpunktes, wenn $BC = a$ und $\sphericalangle\beta$ fest liegen?

Antw.: Ist BC die X-Achse, B der Anfangspunkt, so ist $\frac{a-x}{y} = \operatorname{tg}\beta = e$ oder $y = -\frac{1}{e}x + \frac{a}{e}$.

Der Kreis.

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkte die gleiche Entfernung haben.

Ist der gegebene feste Punkt der Koordinatenanfangspunkt, P ein Punkt der Kreislinie mit dem Koordinaten $OC = x$ und $PC = y$, so gilt, wenn r die Entfernung OP ist, $x^2 + y^2 = r^2$.

Hat der Mittelpunkt die Koordinaten p, q, so ergibt sich in ganz entsprechender Weise

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

1. Wie lautet die Gleichung des Kreises, wenn
$p=0,\ q=0,\ r=4$ ist? $x^2+y^2=16$
$p=2,\ q=3,\ r=5$ ist? $(x-2)^2+(y-3)^2=25$
$p=-4,\ q=2,\ r=7$ ist? $(x+4)^2+(y-2)^2=49$
$p=9,\ q=0,\ r=11$ ist? $(x-9)^2+y^2=121$
$p=-6,\ q=-7,\ r=3$ ist? $(x+6)^2+(y+7)^2=9$
$p=0,\ q=-7,\ r=13$ ist? $x^2+(y+7)^2=169$.

2. Ist $p = r$, $q = 0$, so lautet die Gleichung $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ oder $y^2 = 2rx - x^2$.

Diese Gleichung wird die Scheitelgleichung des Kreises genannt. Es ist dann die X-Achse ein Durchmesser und die Y-Achse eine Tangente des Kreises.

Die Gleichung $y^2 = -2rx - x^2$ stellt ebenfalls einen Kreis dar, der von der Y-Achse berührt wird, und dessen Mittelpunkt auf der negativen X-Achse liegt.

Was stellen darnach die Gleichungen $x^2 = 2ry - y^2$ und $x^2 = -2ry - y^2$ dar?

3. Was stellt die Gleichung

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = 0 \text{ dar?}$$

Offenbar einen Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten p und q und dem Radius $r = 0$, d. h. den Punkt p, q selber.

4. Welche Lage hat der Kreis, dessen Gleichung $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 42 = 0$ ist?

Antw.: $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 100$
also $p = 7,\ q = 3,\ r = 10$.

$x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ ist?

Antw.: $(x+3)^2 + y^2 = 25$
also $p = -3,\ q = 0,\ r = 5$.

$4x^2 + 4y^2 - 40x + 16y + 16 = 0$ ist?

Antw.: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$
also $p = 5,\ q = -2,\ r = 5$.

$2x^2 + 2y^2 + 10x - 20y - \frac{19}{2} = 0$ ist?

Antw.: $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = 36$
also $p = -\frac{5}{2},\ q = 5,\ r = 6$.

$144x^2 + 144y^2 - 96x - 144y - 29 = 0$ ist?

Antw.: $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$
also $p = \frac{1}{3},\ q = \frac{1}{2},\ r = \frac{3}{4}$.

$25x^2 + 25y^2 - 40x - 30y - 350 = 0$ ist?

Antw.: $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{5}\right)^2 = 15$
also $p = \frac{4}{5},\ q = \frac{3}{5},\ r = \sqrt{15}$.

5. Wie lautet die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt, und der durch den Punkt 4,3 geht?

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (r = 5)$$

durch den Punkt 15,8 geht?

$$x^2 + y^2 = 289 \quad (r = 17)$$

durch den Punkt 9,3 geht?

$$x^2 + y^2 = 90 \quad (r = 3\sqrt{10})$$

durch den Punkt 4,4 geht?

$$x^2 + y^2 = 32 \quad (r = 4\sqrt{2})$$

6. Der Mittelpunkt hat die Koordinaten 6,5; der Kreis geht durch den Punkt 10,8. Wie heißt die Gleichung?

Antw.: $(x-6)^2+(y-5)^2=(10-6)^2+(8-5)^2 = 25.\quad r = 5.$

Der Mittelpunkt ist $-4,9$; der Kreis geht durch $6,-1$?

Antw.: $(x+4)^2+(y-9)^2=(6+9)^2+(-1-9)^2 = 200.\quad r = 10\sqrt{2}.$

Der Mittelpunkt ist $7,-4$; der Kreis geht durch $-1,0$?

Antw.: $(x-7)^2+(y+4)^2=(-1-7)^2+(10+4)^2=80.\quad r=4\sqrt{5}.$

Der Mittelpunkt ist $-2, -4$, der Kreis geht durch $6, 2$?

Antw.: $(x+2)^2+(y+4)^2=(6+2)^2+(2+4)^2=100.\quad r=10.$

7. Der Kreis mit dem Radius 17 geht durch die Punkte 9, 9 und 2, 16. Wie heißt die Gleichung?

Antw.: Aus $(9-p)^2+(9-q)^2=289$ und $(2-p)^2+(16-q)^2=289$ folgt $(x+6)^2+(y-1)^2=289.$

mit dem Radius 10 durch 11, 8 und $-5, -4$?

Antw.: $(x-3)^2+(y-2)^2=100.$

mit dem Radius 13 durch 18, 11 und $-6, 1$?

Antw.: $(x-6)^2+(y-6)^2=169.$

mit dem Radius $3\sqrt{5}$ durch 6, 10 und 9, 7?

Antw.: $(x-3)^2+(y-4)^2=45.$

8. Der Kreis, dessen Mittelpunkt im ersten Quadranten liegt, mit dem Radius 5 berührt die Y-Achse im Punkte 7. Wie heißt die Gleichung des Kreises?

Antw.: $(x-5)^2+(y-7)^2=25.$

Der Mittelpunkt liegt im dritten Quadranten und berührt die X-Achse im Punkte -4, $r=3$.

Antw.: $(x+4)^2+(y+3)^2=9.$

9. Ein Kreis geht durch die Punkte 17, 12; $-7, -6$; 14, -9. Wie heißt die Gleichung?

Antw.: Aus den drei Gleichungen

$$(17-p)^2+(12-q)^2=r^2,$$
$$(-7-p)^2+(-6-q)^2=r^2$$
$$\text{und } (14-p)^2+(-9-q)^2=r^2$$

folgt $(x-5)^2+(y-3)^2=225.$

Der Kreis geht durch die Punkte 12, 15; $-36, -5$; $-2, -19$?

Antw.: $(x+12)^2+(y-5)^2=676.$

Der Kreis geht durch die Punkte 20, -7; -12, 17; 16, -11?

Antw.: $(x-4)^2+(y-5)^2=400.$

10. Wie heißt die Gleichung des Kreises, der die X-Achse in den Punkten 2 und 8 schneidet und die Y-Achse berührt?

Antw.: $(x-5)^2+(y-4)^2=25.$

Der Kreis berührt die negative X-Achse im Punkte 12 und schneidet die positive Y-Achse in den Punkten 8 und 18?

Antw.: $(x+12)^2+(y-13)^2=169.$

11. Gegeben ist der Kreis $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ und die Gerade $y=mx+\mu$. In welchen Punkten schneidet die Gerade den Kreis?

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$x_1=\frac{p-m\mu+mq\pm\sqrt{r^2(m^2+1)-(mp+\mu-q)^2}}{m^2+1}$$

$$y_1=\frac{mp+m^2q+\mu\pm m\sqrt{r^2(m^2+1)-(mp+\mu-q)^2}}{m^2+1}.$$

Unter dem Wurzelzeichen steht eine Differenz, die positiv, Null oder negativ sein kann. Die Gerade hat also mit dem Kreise zwei, einen oder keinen Punkt gemein, je nachdem die Wurzel reell, Null oder imaginär ist. Hat die Gerade nur einen Punkt mit dem Kreise gemein, so ist sie eine Tangente. Die Bedingung dafür, daß die Gerade $y=mx+\mu$ Tangente des Kreises ist, lautet also

$$r^2(m^2+1)-(mp+\mu-q)^2=0 \text{ oder}$$
$$r=\frac{mp+\mu-q}{\sqrt{m^2+1}}$$

d. h. die Gerade ist Tangente, wenn die Senkrechte, vom Mittelpunkt auf die Gerade gefällt, gleich r ist.

12. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1\, y_1$? Man erhält die Gleichung der Tangente, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$y_1=mx_1+\mu \quad\text{und}\quad r=\frac{mp+\mu-q}{\sqrt{m^2+1}}$$

die Größen m und μ bestimmt.

Die Gleichung läßt sich aber auch in anderer Weise ableiten. Die Gleichung einer Sekante, die durch die Punkte $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ des Kreises geht, hat die Form $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$. Läßt man die beiden Punkte in einen zusammenfallen, so erhält man die Tangente. Der Wert der Richtungskonstanten $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ wird aber in dieser Form unbestimmt und muß anderweitig bestimmt werden. Aus den beiden Gleichungen $(x_1-p)^2+(y_1-q)^2=r^2$ und

$$(x_2-p)^2+(y_2-q)^2=r^2$$

erhält man durch Subtraktion und Zerlegung in Faktoren

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2 - 2p}{y_1 + y_2 - 2q}, \text{ also}$$

$$\lim \frac{y_1 - y_2}{x - x_2} = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q} \text{ und hieraus}$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1) \text{ oder}$$

$$(y - y_1)(y_1 - q) + (x - x_1)(x_1 - p) = 0.$$

Schreibt man die Gleichung

$$x(x_1 - p) + y(y_1 - q) = x_1(x_1 - p) + y_1(y_1 - q)$$

und subtrahiert beiderseits $p(x_1 - p) + q(y_1 - q)$, so erhält man

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q)$$
$$= (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$$

als Gleichung der Tangente.

Haben p und q den Wert Null, so hat man die einfache Form $xx_1 + yy_1 = r^2$.

13. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = -x + 17$ den Kreis $x^2 + y^2 = 169$?

Antw.: In 12,5 und 5,12.

$y = -3x + 10$ den Kreis $x^2 + y^2 = 10$?

Antw.: Die Gerade ist Tangente in $-3,1$.

$y = x + 15$ den Kreis $x^2 + y^2 = 36$?

Antw.: Die Gerade schneidet den Kreis nicht.

$y = x - \frac{4}{5}$ den Kreis $x^2 + y^2 = 16$?

Antw.: In den Punkten $\frac{16}{5}, \frac{12}{5}$ und $-\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}$.

14. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = x$ den Kreis $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$?

Antw.: In 0,0 und 7,7.

$y = x + 11$ den Kreis $(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 225$?

Antw.: In $-4,7$ und $-1,10$.

$y = -x + 6$ den Kreis $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$?

Antw.: In 3,3 und $-3,9$.

$y = \frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$ den Kreis $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 100$?

Antw.: Sie berührt ihn in $-1,5$.

15. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkte 3,4 an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$?

Antw.: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$,

im Punkte 5,12 an den Kreis $x^2 + y^2 = 169$?

Antw.: $y = -\frac{5}{12}x + \frac{169}{12}$,

im Punkte $-3,1$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 10$?

Antw.: $y = 3x + 10$,

im Punkte $3, -3$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 18$?

Antw.: $y = x - 6$.

16. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkte 17,12 an den Kreis $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 225$?

Antw.: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{104}{3}$,

im Punkte 3,6 an den Kreis $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 25$?

Antw.: $y = \frac{4}{3}x + 2$,

im Punkte 3,5 an den Kreis $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$?

Antw.: $y = -\frac{1}{3}x + 6$,

im Punkte 12,12 an den Kreis $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 289$?

Antw.: $y = -\frac{8}{15} - x + \frac{92}{5}$.

17. Von dem Punkte 7,17 sollen an den Kreis $x^2 + y^2 = 169$ die Tangenten gezogen werden. Welches sind ihre Gleichungen? Welches sind die Berührungspunkte? Wie heißt die Gleichung der Berührungssehne?

Antw.: Aus $y - 17 = m(x - 7)$ und $13 = \frac{-7m + 17}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ergibt sich $m_1 = -\frac{12}{5}$, $m_2 = \frac{5}{12}$.

Die Tangenten sind also:

$$y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5} \text{ und } y = \frac{5}{12}x + \frac{169}{12}.$$

Die Berührungspunkte sind 12, 5 und $-5, 12$, die Sehne $y = -\frac{7}{17}x + \frac{169}{17}$.

18. Wie heißen die Tangenten von dem Punkte 11, 27 an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$?

Antw.: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{125}{3}$ und $y = \frac{13}{84}x + 25\frac{25}{84}$.

Von 7, 23 an den Kreis $x^2 + y^2 = 289$?

Antw.: $y = -\frac{15}{8}x + \frac{289}{8}$ und $y = \frac{8}{15}x + \frac{289}{15}$.

Von $-9, -15$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 18$?

Antw.: $y = x - 6$ und $y = \frac{23}{7}x + \frac{102}{7}$.

Von $-14, 2$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 100$?

Antw.: $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$ und $y = -\frac{4}{3}x - \frac{50}{3}$.

19. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten von dem Punkte $-5, 1$ an den Kreis $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 100$?

Antw.: $y = \frac{24}{7}x + \frac{127}{7}$ und $y = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$.

Von dem Punkte 10, 10 an den Kreis $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 225$?

Antw.: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{70}{3}$ und $x = 10$.

Von dem Punkte 6, 6 an den Kreis $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$?

Antw.: $y = -2x + 18$ und $y = \frac{2}{11}x + \frac{54}{11}$.

Von dem Punkte 18, 2 an den Kreis $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 81$?

Antw.: $y = \frac{3}{4}x - \frac{23}{2}$ und $y = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{2}$.

20. Gegeben sind die drei Geraden $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$, $y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{2}$ und $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der die drei Seiten berührt?

Antw.: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

21. An den Kreis $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 10$ soll die Tangente gezogen werden, die auf der Geraden $y = \frac{1}{3}x + 8$ senkrecht steht.

Antw.: $y = -3x + 26$ und $y = -3x + 6$.

22. An den Kreis $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 169$ soll die Tangente gezogen werden, die mit der Geraden $y = -\frac{17}{7}x + 34$ einen Winkel von 45^0 bildet.

Antw.: Es gibt 4 Tangenten:

$$y = \frac{12}{5}x + \frac{46}{5}, \quad y = -\frac{5}{12}x + \frac{178}{12},$$

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{292}{5} \text{ und } y = -\frac{5}{12}x - \frac{160}{12}.$$

23. Gegeben sind der Kreis $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 20$ und die beiden Geraden $y = \frac{13}{9}x$ und $y = \frac{1}{3}x$. Wie groß ist das Flächenstück, welches die beiden Geraden aus dem Kreise herausschneiden?

Antw.: $F = 51{,}416$.

24. An die beiden Kreise $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$ und $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 64$ sollen die gemeinschaftlichen Tangenten gezogen werden. Wie heißen ihre Gleichungen? Wie die der gemeinschaftlichen Sehne, der Zentrale? Welches ist der äußere Ähnlichkeitspunkt?

Antwort: Die Tangenten sind $y = 12$ und $y = -\frac{15}{8}x + 2$; die gem. Sehne $y = \frac{5}{3}x + \frac{17}{6}$; die Zentrale $y = -\frac{3}{5}x + \frac{44}{5}$; A: $-\frac{16}{3}, 12$.

An die beiden Kreise $(x + 5)^2 + (y + 7)^2 = 100$ und $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 25$?

Antw.: Die Tangenten $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ und $y = \frac{4}{3}x - 17$; die gem. Sehne $y = -7x + \frac{41}{2}$; die Zentrale $y = \frac{1}{7}x - \frac{44}{7}$; A: $9, -5$.

25. An die beiden Kreise $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 225$ und $(x - 7)^2 + (y - 19)^2 = 9$ sollen die gemeinschaftlichen Tangenten gezogen werden. Wie heißen ihre Gleichungen? Wie die der Zentrale?

Antwort: Die inneren Tangenten: $y = 16$ und $y = -\frac{3}{4}x + \frac{41}{2}$; die äußeren: $y = \frac{-3 + 2\sqrt{6}}{3}x + \frac{45 - 17\sqrt{6}}{3}$ und $y = \frac{-3 - 2\sqrt{6}}{3}x + \frac{45 + 17\sqrt{6}}{3}$ die Zentrale $y = 3x - 2$.

26. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn die Grundlinie $BC = a$ fest ist und $AC^2 + AB^2 = s^2$ ist?

Antw.: Ist BC die X-Achse, und geht die Y-Achse durch den Halbierungspunkt von BC, so ist $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + y^2 = s^2$ oder $x^2 + y^2 = \frac{s^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

27. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze, wenn $BC = a$ festliegt und $AC : AB = m : n$ ist?

Antw.: Liegen die Achsen wie vorher, so ist

$$\left(x - \frac{a}{2} \cdot \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2 n^2 a^2}{(m^2 - n^2)^2}.$$

28. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn $BC = a$ festliegt und der gegenüberliegende Winkel α gegeben ist?

Antw.: Ist α gegeben, so ist auch $\operatorname{tg}\alpha = e$ konstant.

Aus $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma} = e$

erhält man $x^2 + \left(y - \frac{a}{2e}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4e^2}$.

29. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn $BC = a$ festliegt und die Mittellinie m_b gegeben ist?

Antw.: Ist BC die X-Achse und B der Anfangspunkt, so ist $(x + a)^2 + y^2 = 4 m_b^2$.

Die Parabel.

Die Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkt und einer festen Geraden gleich sind. Nimmt man die Senkrechte von dem Punkte F auf die Gerade L zur X-Achse und die Senkrechte hierzu im Halbierungspunkt der Strecke zur Y-Achse, so gilt die Gleichung

$$y^2 = 2px,$$

wo p die Senkrechte von F auf L ist. p ist dann auch gleich der Ordinate im Brennpunkte F. 2p heißt der Parameter der Parabel.

1. Wie heißt die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Koordinaten-Anfangspunkt liegt, wenn der Brennpunkt die Koordinaten 3,0 hat?

Antw.: $y^2 = 12x$.

2. Wie heißt die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Koordinaten-Anfangspunkt liegt und deren Achse die X-Achse ist, wenn die Parabel durch den Punkt 6,4 geht?

Antw.: $y^2 = \frac{8}{3}x$.

3. Wie lautet die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Punkte a, b liegt, deren Achsen den Koordinaten-Achsen parallel laufen?

Antw.: $(y - b)^2 = 2p(x - a)$.

Welche Lage hat die Parabel

$$(y - b)^2 = -2p(x - a)?$$

Welche Lage $(x - a)^2 = 2p(y - b)$?

4. Wie heißt die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Punkte 6,3 liegt, deren Achse der X-Achse parallel ist, wenn der Parameter $2p = 8$ ist?

Antw.: $(y - 3)^2 = 8(x - 6)$.

5. Eine Parabel, deren Achse der X-Achse parallel ist mit dem Parameter $2p = 6$ geht durch die Punkte 2,4 und 18,12. Wie heißt die Gleichung?

Antw.: $(y - 2)^2 = 6\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

6. Eine Parabel, deren Achse der X-Achse parallel ist, geht durch die Punkte 12,9; 30,—9 und 12,—3. Wie heißt die Gleichung?

Antw.: $(y - 3)^2 = 6(x - 6)$;

durch die Punkte —2,3; 4,15; 14,—5?

Antw.: $(y - 7)^2 = 8(x + 4)$.

7. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = mx + \mu$ die Parabel $(y - b)^2 = 2p(x - a)$?

Antw.: Aus den beiden Gleichungen ergibt sich:

$$x_1 = \frac{p - m(\mu - b) \pm \sqrt{p(p - 2m)(\mu - b + am)}}{m^2}$$

$$y_1 = \frac{p + mb \pm \sqrt{p(p - 2m)\mu - b + am.}}{m}$$

Unter dem Wurzelzeichen steht eine Differenz. Die Gerade hat also mit der Parabel 2, 1 oder keinen Punkt gemein, je nachdem $p - 2m(\mu - b \times a\,m)$ größer, gleich oder kleiner als Null ist. Die Bedingung dafür, daß die Gerade $y = mx + m$ Tangente der Parabel $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ ist, lautet also

$$p = 2m(\mu - b + am).$$

Ist in der Gleichung der Geraden $m = o$, also $y = \mu$, so hat die Gerade nur den Punkt

$$x_1 = a + \frac{(\mu - b)^2}{2p} \quad y_1 = \mu$$

gemein. Sie berührt aber nicht die Parabel in diesem Punkt, sondern schneidet sie, sie ist ein Durchmesser.

8. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = \frac{4}{5}x + \frac{24}{5}$ die Parabel $y^2 = 16x$?

Antw.: In den Punkten 4,8 und 9,12.

In welchen Punkten die Gerade $y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}$ die Parabel $y^2 = 6x$?

Antw.: In $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ und 2, 3.

Die Gerade $y = \frac{2}{3}x + 3$ die Parabel $(y - 3)^2 = 4(x - 2)$?

Antw.: In 3, 5 und 6, 7.

9. Wie heißt die Gleichung der Tangente an die Parabel $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ im Punkte $x_1 y_1$?

Antw.: In gleicher Weise, wie es beim Kreise geschehen ist, läßt sich durch Übergang von der Sekante zur Tangente die Gleichung darstellen

$$(y - b)(y_1 - b) = p(x + x_1 - 2a).$$

10. An die Parabel $y^2 = 15x$ ist im Punkte $\frac{5}{3}$, 5 die Tangente gezogen. Wie lautet ihre Gleichung? Wie die der Normale? Wie lang ist die Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale?

Antw.: $T: y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$; $N: y = -\frac{2}{3}x + \frac{55}{3}$;

$T = \frac{5}{3}\sqrt{13}$; $N = \frac{5}{2}\sqrt{13}$; $ST = \frac{10}{3}$; $SN = \frac{15}{2}$.

Desgleichen für die Parabel $y^2 = 18x$ im Punkte 8,12?

Antw.: $T: y = \frac{3}{4}x + 6$; $N: y = -\frac{4}{3}x + \frac{68}{3}$;
$T = 20$; $N = 15$; $ST = 16$; $SN = 9$.

11. An die Parabel $(y - 3)^2 = 4(x - 2)$ ist im Punkte 3,5 die Tangente gezogen. Wie lautet ihre Gleichung?

Antw.: $y = x + 2$.

An $y^2 = 10(x - 5)$ in 15, 10?

Antw.: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$,

an $(y - 2)^2 = 16x$ in 4,10?

Antw.: $y = x + 6$,

an $(y + 4)^2 = 5(x - 3)$ in 8, 1?

Antw.: $y = \frac{1}{2}x - 3$.

12. An die Parabel $(y - 3)^2 = 4(x + 2)$ sind in den Punkten 2,7 und 14,11 die Tangenten gezogen. Wie heißen die Gleichungen, in welchem Punkte schneiden sie sich, unter welchem Winkel?

Antw.: $y = \frac{1}{2}x + 6$; $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{2}$; Schnittpunkt 6, 9. $\vartheta = 12^0\ 31'\ 44''$.

13. Von dem Punkte — 6,1 sind an die Parabel $y^2 = 4x$ die Tangenten gezogen. Wie heißen die Gleichungen? Welches sind die Berührungspunkte? Welchen Winkel bilden die Tangenten?

Antw.: $y = \frac{1}{3}x + 3$; Berührungspunkt 9,6 und $y = -\frac{1}{2}x - 2$; Berührungspunkt 4,4; $\vartheta = 135^0$.

Desgleichen von dem Punkte 6,15 an $y^2 = 36x$?

Antw.: $y = \frac{3}{2}x + 6$; 4,12; $y = x + 9$; 9,18; $\vartheta = 5^0\ 42'\ 38''$.

Desgleichen von dem Punkte 8,9 an $y^2 = 9x$?

Antw.: $y = \frac{3}{4}x + 3$; 4,6; $y = \frac{3}{8}x + 6$; 16,12; $\vartheta = 16^0\ 18'\ 50''$.

14. Von dem Punkte 9,0 an die Parabel $(y - 8)^2 = 10(x - 3)$?

Antw.: $y = -\frac{5}{6}x + \frac{15}{2}$; $\frac{33}{5}$, 2; $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$; 13, — 2; $\vartheta = 13^0\ 14'\ 26''$.

Desgl. von dem Punkte 4,2 an $(y + 2)^2 = 6(x - 2)$?

Antw.: $y = \frac{1}{2}x$; 8,4; $y = \frac{3}{2}x - 2$; $\frac{8}{3}$, 2; $\vartheta = 29^0\ 44'\ 41''$.

Desgl. von dem Punkte — 1, — 2 an $y^2 = 12(x - 4)$?

Antw.: $y = x - 1$; 7,6; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$; $\frac{37}{3}$, 10; $\vartheta = 104^0\ 2'\ 10''$.

15. Wie heißt die Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2 = 8x$, die der Sehne $y = \frac{1}{2}x + 3$ parallel ist, und welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: $y = \frac{1}{2}x + 4$; 8,8.

Desgleichen an
$(y - 4)^2 = 12(x - 3)$ parallel $y = -2x + 22$?

Antw.: $y = -2x + \frac{17}{2}$; $\frac{15}{4}$, 1.

16. In die Parabel $y^2 = 8x$ ist ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, so daß eine Ecke im Scheitel liegt. Welches sind die andern Ecken F, und wie groß ist der Flächeninhalt?

Antw.: Die andern Ecken sind $24, 8\sqrt{3}$ und $24, -8\sqrt{3}$; $F = 192\sqrt{3}$.

Desgleichen in die Parabel $(y-4)^2 = 6(x-4)$?

Antw.: $22, 6\sqrt{3}+4$ und $22, -6\sqrt{3}+4$; $F = 108\sqrt{3}$.

17. Um den Scheitel der Parabel $y^2 = \frac{16}{3}x$ ist mit dem Radius $r = 5$ der Kreis beschrieben. Welches sind die Schnittpunkte? Welchen Winkel bilden die Tangenten in einem Schnittpunkt?

Antw.: Die Schnittpunkte sind $3, +4$ und $3, -4$; die Tangenten $T_p: y = \frac{2}{3}x + 2$; $T_k: y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$;

$\vartheta = 109^0\ 26'\ 24''$.

Desgleichen $y^2 = 18x$, $r = 2\sqrt{10}$?

Antw.: $2, +6$ und $2, -6$.

$T_p: y = \frac{3}{2}x + 3$; $T_k: y = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$;

$\vartheta = 105^0\ 15'\ 18''$.

Desgleichen $y^2 = 20x$, $r = 5\sqrt{5}$?

Antw.: $5, +10$; $5, -10$.

$T_p: y = x + 5$, $T_k: y = -\frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$;

$\vartheta = 108^0\ 26'\ 6''$.

18. Um den Scheitel der Parabel $(y-4)^2 = 6(x-2)$ ist mit dem Radius $r = 6\sqrt{2}$ der Kreis beschrieben. Welches sind die Schnittpunkte, welche Winkel bilden die Tangenten eines Schnittpunktes?

Antw.: $8, 10$; $T_p: y = \frac{1}{2}x + 6$; $T_k: y = -x + 18$ und $8, -2$; $T_p: y = -\frac{1}{2}x + 2$; $T_k: y = x - 10$;

$\vartheta = 108^0\ 26'\ 6''$.

Desgl. $(y+5)^2 = 8(x+4)$, $r = 8\sqrt{2}$?

Antw.: $4, 3$; $T_p: y = \frac{1}{2}x + 1$; $T_k: y = -x + 7$.

$4, -13$; $T_p: y = -\frac{1}{2}x - 11$; $T_k: y = x - 17$;

$\vartheta = 108^0\ 26'\ 6''$.

19. Um den Brennpunkt der Parabel $y^2 = 16x$ ist der Kreis mit dem Radius 13 beschrieben. Welches sind die Schnittpunkte, die Tangenten, der Winkel?

Antwort: $9, \pm 12$; $T_p: y = \frac{2}{3}x + 6$; $T_k: y = -\frac{5}{12}x + \frac{63}{4}$; $\vartheta = 123^0\ 41'\ 24''$.

Desgleichen $y^2 = 12x$; $r = 30$?

Antw.: $27, \pm 18$; $T_p: y = \frac{1}{3}x + 9$; $T_k: y = -\frac{4}{3}x + 54$; $\vartheta = 108^0\ 26'\ 6''$.

Desgleichen $(y-3)^2 = 8(x-2)$, $r = 10$?

Antwort: $10, 11$; $T_p: y = \frac{1}{2}x + 6$; $T_k: y = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{2}$; $\vartheta = 158^0\ 11'\ 54''$;

und $10, -5$; $T_p: y = -\frac{1}{2}x$; $T_k: y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{2}$.

20. Wie heißt die gemeinschaftliche Tangente der beiden Parabeln $y^2 = 12x$ und $(y-2)^2 = 8(x-1)$?

Antw.: Die beiden Parabeln berühren sich im Punkte $3, 6$, die Tangente ist $y = x + 3$.

21. Gegeben sind die Parabeln $y^2 = 10x$ und $(y-2)^2 = 8(x-2)$. In welchen Punkten schneiden sie sich und unter welchem Winkel?

Antw.: Im Punkte $10, 10$. $T_1: y = \frac{1}{2}x + 5$; $T_2: y = \frac{5}{8}x + \frac{9}{2}$; $\vartheta = 6^0\ 42'\ 35''$.

Desgl. $y^2 = 12x$ und $(y-1)^2 = 5(x+2)$?

Antw. I: $3, 6$; $y = x + 3$ und $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$; $\vartheta = 18^0\ 26'\ 6''$.

II: $-\frac{18}{7}, \frac{27}{49}$; $y = -\frac{7}{3}x - \frac{9}{7}$ und $y = -\frac{7}{10}x - \frac{153}{70}$; $\vartheta = 31^0\ 48'\ 34''$.

22. Wie heißt die gemeinschaftliche Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = \frac{75}{4}x$?

Antw.: $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{3}$; die Berührungspunkte $-3, 4$ und $\frac{25}{3}, \frac{25}{2}$.

Desgl. $x^2 + y^2 = 8$ und $y^2 = 16x$?

Antw.: $y = x + 4$; $-2,2$ und $4,8$.

Desgl. $x^2 + y^2 = 20$ und $y^2 = 10x$?

Antw.: $y = \frac{1}{2}x + 5$; $-2,4$ und $10,10$.

Desgl. $x^2 + y^2 = 90$, $y^2 = \frac{40}{3}x$?

Antw.: $y = \frac{1}{3}x + 10$; $-3,9$ und $30,20$.

23. In welchen Punkten schneiden sich die beiden Parabeln $y^2 = 16x$ und $y^2 = 18(x-4)$? Unter welchem Winkel? Wie groß ist das von beiden Parabeln begrenzte Flächenstück?

Antw.: $36, \pm 24$. $T_1 : y = \frac{1}{3}x + 12$, $T_2 : y = \frac{3}{8}x + \frac{21}{2}$; $\vartheta = 2^0\ 7'\ 16''$; $F = 128$.

24. Um den Brennpunkt der Parabel $y^2 = 16x$ ist der Kreis mit dem Radius $r = 5$ beschrieben. Welches sind die Schnittpunkte? Wie groß ist der Winkel der Tangenten? Wie heißt die gemeinschaftliche Tangente, und welches sind ihre Berührungspunkte?

Antw.: 1,4. $T_p : y = 2x + 2$; $T_k : y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$. Gem. Tang. $y = \frac{4}{3}x + 2$. Berührungsp. $K : 0,3$; $P : \frac{9}{4}, 6$. Die Winkel des von den Tangenten gebildeten Dreiecks sind $\vartheta_1 = 153^0\ 26'\ 6''$, $\vartheta_2 = 16^0\ 15'\ 37''$, $\vartheta_3 = 10^0\ 18'\ 17''$; $F = \frac{5}{28}$.

25. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 8x$. In den drei Punkten mit den Ordinaten 2,4 und 8 sind die Tangenten gezogen. In welchen Punkten schneiden sich die Tangenten? Welche Winkel hat das von ihnen gebildete Dreieck? Wie heißt die Gleichung des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises?

Antw.: $T_1 : y = 2x + 1$, $T_2 : y = x + 2$, $T_3 : y = \frac{1}{2}x + 4$. Die Schnittpunkte sind $P_1 : 1,3$, $P_2 : 2,5$, $P_3 : 4,6$; $\vartheta_1 = 18^0\ 25'\ 51,5''$, $\vartheta_2 = 143^0\ 8'\ 17''$, $\vartheta_3 = 18^0\ 25'\ 51,5''$; $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

26. Welches Flächenstück schneidet die Gerade $y = 2x$ von der Parabel $y^2 = 24x$?

Antw.: $F = 12$.

Welches Stück schneidet die Gerade $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ von der Parabel $y^2 = 8x$? $F = \frac{16000}{81}$.

27. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn $BC = a$ festliegt und $\sin\beta = \operatorname{tg}\gamma$ ist?

Antw.: Ist BC die X-Achse, B der Anfangspunkt, so ist $y^2 = -2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$.

28. Welches ist der geometrische Ort des Höhenschnittpunktes, wenn $BC = a$ festliegt und Punkt A auf der Parallelen zu BC gleitet?

Antw.: Ist BC die X-Achse, die Mittelsenkrechte dazu die Y-Achse, so ist $x^2 = -h\left(y - \frac{a^2}{4h}\right)$.

29. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze, wenn $BC = a$ festliegt und $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = c$ ist?

Antw.: $x^2 = -\frac{a}{c}\left(y - \frac{a}{4c}\right)$.

Die Ellipse.

Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist. Fällt die X-Achse mit der Verbindungslinie der festen Punkte zusammen, die Y-Achse in die Mittelsenkrechte dazu und ist die Summe der Entfernungen $2a$, die Entfernung der festen Punkte $2e$ und $b = \sqrt{a^2 - e^2}$, so gilt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hat der Mittelpunkt der Ellipse die Koordinaten p, q und laufen ihre Achsen den Koordinatenachsen parallel, so lautet die Gleichung

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

1. Wie lautet die Gleichung der Ellipse, deren Halbachsen $a = 5$ und $b = 4$ sind? Wie groß ist e?

Antw.: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $e = 3$.

2. Wie groß sind die Halbachsen und wie groß ist e, wenn $9x^2 + 25y^2 = 225$ ist?

Antw.: $a = 5,\ b = 3,\ e = 4.$

$144x^2 + 169y^2 = 24336$ ist?

Antw.: $a = 13,\ b = 12,\ e = 5.$

$8x^2 + 9y^2 = 1$ ist?

Antw.: $a = 3,\ b = 2\sqrt{2},\ e = 1.$

3. Wie groß sind die Halbachsen und e, wenn $16x^2 - 96x + 25y^2 - 200y + 144 = 0$ ist?

Antw.: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$; $a = 5,\ b = 4,\ e = 3;\ p, q = 3,4.$

Desgl. $6x^2 + 24x + 12y^2 - 48y = 0$?

Antw.: $\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1;\quad a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{6},\ e = \sqrt{6},\ p, q = -2,2.$

Desgl. wenn $8x^2 - 16x + 12y^2 + 72y + 20 = 0$ ist?

Antw.: $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1;\quad a = 2\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{2},\ e = 2,\ p, q = 1, -3.$

4. Wie heißt die Gleichung der Ellipse, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, und die durch die Punkte 8,3 und 6,4 geht?

Antw.: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$

Desgl. durch die Punkte 12,12 und —4,3?

Antw.: $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1.$

Desgl. durch 20,—6 und —15,8?

Antw.: $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1.$

5. Für welchen Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ ist die Ordinate gleich der Abszisse?

Antw.: $x_1 = y_1 = 4\frac{4}{5}.$

6. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = mx + \mu$ die Ellipse $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$?

Antwort:

$$x_1 = \frac{b^2p - a^2m(\mu - q) \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - (mp + \mu - q)^2}}{a^2m^2 + b^2}$$

$$y_1 = \frac{b^2(mp + \mu - q) + (a^2m^2 + b^2)q \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - (mp + \mu - q)^2}}{a^2m^2 + b^2}$$

Unter dem Wurzelzeichen steht eine Differenz, also erhält man zwei, einen oder keinen Schnittpunkt, je nachdem die Differenz größer, gleich oder kleiner als Null ist.

Die Bedingung, daß die Gerade Tangente der Ellipse ist, lautet also $mp + \mu - q = \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

7. Die Gleichung der Tangente an die Ellipse $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ im Punkte $x_1\ y_1$ ergibt sich wie beim Kreise

$$\frac{(x-p)(x_1-p)}{a^2} + \frac{(y-q)(y_1-q)}{b^2} = 1.$$

8. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = \frac{1}{4}x + 1$ die Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$?

Antw.: In $\frac{16}{5}, \frac{9}{5}$ und $-4, 0$.

Desgl. die Gerade $y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$ die Ellipse $\frac{4x^2}{25} + \frac{9y^2}{25} = 1$?

Antw.: 2, 1 und $\frac{112}{61}, \frac{69}{61}$.

Desgl. $y = x - 1$ die Ellipse $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$?

Antw.: 3, 2 und $-\frac{9}{5}, -\frac{14}{5}$.

Desgl. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ der Ellipse $\frac{x^2}{22} + \frac{y^2}{11} = 1$?

Antw.: Sie berührt sie in 2,3.

9. Wie heißt die Gleichung der Tangenten an die Ellipse

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ im Punkte 1, $\frac{3}{2}$?

Antw.: $y = -\frac{1}{2}x + 2,$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ im Punkte 4, $\frac{9}{5}$?

Antw.: $y = -\frac{4}{5}x + 5,$

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ im Punkte 3, 1?

Antw.: $y = -x + 4.$

10. An die Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ soll die Tangente gezogen werden, die der Geraden $y=-\frac{3}{5}x+12$ parallel ist. Wie heißt sie, und in welchem Punkte berührt sie?

Antw.: $y=-\frac{3}{5}x\pm 5$; im Punkte $\pm 3, \pm\frac{16}{5}$.

11. Wie groß ist der Inhalt des der Ellipse $3x^2+4y^2=1$ einbeschriebenen Rechtecks, wenn die Abszissen der Eckpunkte doppelt so groß sind wie die Ordinaten?

Antw.: $F=\frac{1}{2}$.

12. Die Ecken eines Rhombus sind $\pm 8, \pm 4$. Wie heißt die Ellipse, die dem Rhombus einbeschrieben ist und deren Brennweite $2e=2\sqrt{14}$ ist? Welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{10}=1$;

die Berührungspunkte $\pm 3, \pm\frac{5}{2}$.

13. Wie heißen die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$, die auf der Geraden $y=x+6$ senkrecht stehen, und welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: $y=-x\pm 4$; die Berührungspunkte 3,1 und $-3, -1$.

14. Von dem Punkte 6, 1 sollen die Tangenten an die Ellipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{7}=1$ gezogen werden. Wie heißen die Gleichungen, welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: 1. $y=-\frac{1}{3}x+3$; $2, \frac{7}{3}$; 2. $y=x-5$; $\frac{18}{5}, -\frac{7}{5}$.

Desgl. von dem Punkte 3, 6 an $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$?

Antw.: 1. $y=-x+9$; 5, 4; 2. $y=6$; 0,6.

Desgleichen von dem Punkte -1,20 an $\frac{(x-3)^2}{48}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$?

Antw.: 1. $y=6x+26$; $-\frac{27}{7}, \frac{20}{7}$;

2. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{37}{2}$; 9, 5.

15. Um den Mittelpunkt der Ellipse mit den Halbachsen 9 und 4 ist der der Ellipse inhaltsgleiche Kreis beschrieben. Wie groß ist der Radius? Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven? Welches sind die gemeinschaftlichen Tangenten und ihre Berührungspunkte? Wie groß ist die Ellipse? Wie groß ist der Rhombus der gemeinschaftlichen Tangenten?

Antw.: $r=6$; die Schnittpunkte $\pm\frac{18}{13}\sqrt{13}, \pm\frac{12}{13}\sqrt{13}$;

$T_k: y=-\frac{3}{2}x+3\sqrt{13}$; $T_e: y=-\frac{8}{27}x+\frac{4}{3}\sqrt{13}$;

$\vartheta=39^0\,48'\,20''$

die gem. T. $y=\pm\frac{2}{3}x\pm 2\sqrt{13}$; $\pm\frac{12}{13}\sqrt{13}, \pm\frac{18}{13}\sqrt{13}$ und $\pm\frac{27}{13}\sqrt{13}, \pm\frac{8}{13}\sqrt{13}$; $J=36\pi$ $F=156$.

16. Von dem Punkte $7, -\frac{3}{5}$ sind an die Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ die Tangenten gezogen. Wie heißen ihre Gleichungen? Welchen Winkel bilden sie? Wie heißt die Berührungssehne?

Antw.: $y=-\frac{4}{5}x+5$ und $y=\frac{9}{20}x-\frac{15}{4}$;

$4, \frac{9}{5}$ und $3, -\frac{12}{5}$;

Berührungssehne $y=\frac{21}{5}x-15$; $\vartheta=117^0\,28'\,27''$.

17. Um den rechten Brennpunkt der Ellipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ ist mit dem Radius $r=\frac{50}{3}$ der Kreis beschrieben. In welchen Punkten schneidet er die Ellipse und unter welchem Winkel?

Antw.: $\frac{2}{3}, \pm\frac{40}{9}$; $T_e: y=-\frac{1}{12}x+\frac{9}{2}$; $T_k: y=\frac{3}{4}x+\frac{71}{18}$; $\vartheta=138^0\,21'\,57''$.

18. Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ und der Kreis $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{45}{4}$.

Wie heißen die gemeinschaftlichen Tangenten, und welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: $y = \pm \frac{1}{2} x + 2$; E: -1, $\pm \frac{3}{2}$; K: $2, \pm 3$.

19. Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ und die Parabel $y^2 = \frac{8}{3} x$. In welchen Punkten schneiden sich die Kurven und unter welchem Winkel? Welches ist die gemeinsame Tangente?

Antw.: $\frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$; $T_e: y = -\frac{1}{4} x + \frac{3}{2}$;

$T_p: y = x + \frac{2}{3}$; $\vartheta = 120^0\,57'\,50''$;

gem. T. $y = \frac{1}{6}\sqrt{6}\, x + \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Desgl. $\frac{x^2}{25} + \frac{9y^2}{100} = 1$ und $y^2 = x$?

Antw.: $4, \pm 2$; $T_e: y = -\frac{8}{9} x + \frac{50}{9}$;

$T_p: y = \frac{1}{4} x + 1$; $\vartheta = 124^0\,19'\,51''$;

gem. T. $y = \frac{1}{30}\sqrt{5}\, x + \frac{1}{120}\sqrt{5}$.

20. Gegeben sind die Ellipsen $\frac{x^2}{45} + \frac{4y^2}{81} = 1$ und $\frac{(x-3)^2}{22} + \frac{y^2}{11} = 1$. In welchem Punkte schneiden sie sich und unter welchem Winkel?

Antw.: $5, \pm 3$; $y = -\frac{3}{4} x + \frac{27}{4}$ und

$y = -\frac{1}{3} x + \frac{14}{3}$; $\vartheta = 18^0\,26'\,6''$.

21. Ein Durchmesser der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ geht durch den Punkt $4, \frac{12}{5}$. Wie lautet die Gleichung des konjugierten Durchmessers, und in welchen Punkten schneidet er die Ellipse?

Antw.: $y = -\frac{16}{15} x$; $\pm 3, \pm \frac{9}{5}$.

22. Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$. Wie lang sind die beiden konjugierten Durchmesser, die einander gleich sind? Welches sind ihre Gleichungen? Wo schneiden sie die Ellipse?

Antw.: 4; $y = \frac{3}{5} x$ und $y = -\frac{5}{3} x$;

$\pm \frac{5}{4}\sqrt{2}, \pm \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

23. Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$. In dem Punkte, dessen Abszisse 3 ist, ist die Sehne senkrecht zur X-Achse gezogen. Wie groß ist das abgeschnittene Segment?

Antw.: $Sg = \frac{5}{6}\left(\frac{36\pi . 120}{360} - \frac{36}{4}\sqrt{3}\right) = 18{,}425$.

24. Welchen Flächeninhalt hat a) das kleinere, b) das größere der von den beiden Ellipsen $\frac{x^2}{45} + \frac{4y^2}{81} = 1$ und $\frac{(x-3)^2}{22} + \frac{y^2}{11} = 1$ begrenzten Segmente?

Antw.: a) $Seg = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{22}}\left(\frac{22\pi \text{ arctg} \frac{3}{\sqrt{2}}}{180} - 6\sqrt{2}\right)$

$- \frac{3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{45\pi \text{ arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}}{180} - 10\sqrt{5}\right)$

a) $= 3{,}095$ b) $Sg = 49{,}06$.

25. Wie groß ist das von der Parabel $y^2 = x$ und der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{9y^2}{100} = 1$ begrenzte Flächenstück?

Antw.: $F = \frac{\frac{10}{3}}{5}\left(\frac{25\pi \text{ arctg} \frac{4}{3}}{180} - 4 . 3\right)$

$+ \frac{4}{3} . 4 . 2 = 13{,}392$.

26. Gegeben sind die Ellipse $\frac{x^2}{25} - \frac{8y^2}{75} = 1$ und die beiden Parabeln, welche den Mittelpunkt der Ellipse zum Scheitel haben und durch den Punkt 1, 3 gehen, während ihre Achsen bezüglich die X-Achse und Y-Achse sind. Wie groß sind die Flächenstücke, in welche die Ellipse geteilt wird?

Antw.: Die von der Ellipse und einer Parabel begrenzten Stücke sind a, 19, 966, b, 2, 084; die von beiden Parabeln begrenzten Stücke sind gleich 1.

27. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze A des Dreiecks, wenn die Grundlinie $BC = a$ fest ist und die Summe der beiden andern Seiten gleich s ist?

Antw.: Ist BC die X-Achse, der Halbierungspunkt von BC der Anfangspunkt, so ist

$$\frac{4x^2}{s^2} + \frac{4y^2}{s^2 - a^2} = 1.$$

28. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn $tg\beta \cdot tg\gamma = +c$ ist?

Antw.: Ist das Koordinatensystem wie vorher, so ergibt sich $\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2c} = 1.$

29. Innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist der Punkt a, o gegeben. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch den Punkt a, o gehen und den gegebenen Kreis berühren?

Antw.: $\frac{4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{r^2} + \frac{4y^2}{r^2 - a^2} = 1.$

Die Hyperbel.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte, für die die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist. Liegen die Koordinatenachsen wie bei der Ellipse, ist 2a die Differenz der Entfernungen, 2e der Abstand der festen Punkte von einander und $e^2 - a^2 = b^2$, so gilt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

Hat der Mittelpunkt der Hyperbel die Koordinaten p, q, und sind die Achsen den Koordinatenachsen parallel, so lautet die Gleichung

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

1. Wie lautet die Gleichung der Hyperbel, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, wenn $2a = 10$, $2b = 8$ ist?

Antw.: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$

2. Wie lautet die Gleichung der Hyperbel, wenn $2a = 16$, $2e = 20$ ist?

Antw.: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$

3. Wie heißen die Gleichungen der Brennstrahlen für den Punkt $x_1\, y_1$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Antw.: $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 \mp e}(x - x_1).$

Für den Punkt $13\frac{1}{3}$, 8 der Hyperbel $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$?

Antw.: $y = \frac{12}{5}x - 24$ und $y = \frac{12}{35}x + \frac{24}{7}$;
ihr Winkel $\vartheta = 48^0\, 27'\, 30''$.

4. Für welchen Punkt der Hyperbel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ stehen die Brennstrahlen aufeinander senkrecht?

Antw.: $\frac{4}{5}\sqrt{34}$, $\frac{9}{5}$.

5. Wie heißt die Gleichung der Hyperbel, welche durch die Punkte $6\frac{1}{4}$, 3 und 13, $9\frac{3}{5}$ geht?

Antw.: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Desgl. durch 3, 2 und $-\frac{31}{11}$, $-\frac{10}{11}$?

Antw.: $3x^2 - y^2 = 23.$

Desgl. durch 9, 3 und -18, -15?

Antw.: $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1.$

6. Wie heißt die Gleichung der Hyperbel, die durch die Punkte 8,3 und $\frac{13}{2}$, $\frac{5}{4}$ geht und deren Mittelpunkt die Koordinaten 2,1 hat?

Antw.: $\frac{(x-2)^2}{20} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$

7. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = mx + \mu$ die Hyperbel $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$?

Antwort: In

$$x_1 = \frac{b^2p + a^2m(\mu - q) \pm ab\sqrt{b^2 - a^2m^2 + (pm + \mu - q)^2}}{b^2 - a^2m^2}$$

$$y_1 = \frac{b^2(mp + \mu - q) + q(b^2 - a^2m^2) \pm abm\sqrt{b^2 - a^2m^2 + (pm + \mu - q)^2}}{b^2 - a^2m^2}$$

Unter dem Wurzelzeichen steht eine Differenz. Ist diese gleich Null, so hat die Gerade nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein. Die Bedingung, daß die

Gerade eine Tangente der Kurve ist, lautet also $mp + \mu - q = \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

8. In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = \frac{6}{7}x - 1$ die Hyperbel $\frac{4x^2}{21} - \frac{y^2}{3} = 1$?

Antw.: In $\frac{7}{2}$,2 und 7,5.

Desgl. $y = 3x - 8$ die Hyperbel $5x^2 - y^2 = 64$?

Antw.: In 4,4 und 8,16.

Desgl. $y = 3x - 11$ die Hyperbel $x^2 - y^2 = 32$?

Antw.: Sie berührt sie in 6,2.

9. In welchem Verhältnis steht die Länge der Tangente $\frac{5}{4}x - 4$ an die Hyperbel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ zur Länge der zugehörigen Normale?

Antw.: $T = \frac{9}{20}\sqrt{26}$, $N = \frac{9}{16}\sqrt{26}$; $T : N = 4 : 5$.

10. Wie heißt die Gleichung der Tangente im Punkte 13,12 an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 25$?

Antw.: $y = \frac{13}{12}x - \frac{25}{12}$.

Desgl. in 8, —6 an $\frac{x^2}{10} - \frac{3y^2}{20} = 1$?

Antw.: $y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{9}$.

Desgl. in 12, 9 an $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{27} = 1$?

Antw.: $y = x - 3$.

11. Wie heißt die Gleichung der Tangente im Punkte 7,7 an die Hyperbel $\frac{(x-1)^2}{6} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$?

Antw.: $y = x$.

Desgl. in 8, 9 an $(x+1)^2 - \frac{4}{5}(y+1)^2 = 1$?

Antw.: $y = \frac{9}{8}x$.

Desgl. in 19, 16 an $\frac{(x-3)^2}{106} - \frac{(y-1)^2}{159} = 1$?

Antw.: $y = -\frac{8}{5}x - \frac{72}{5}$.

12. Wie heißt die Gleichung der Tangenten von dem Punkte 2,$\frac{3}{2}$ an die Hyperbel $x^2 - \frac{3}{2}y^2 = 1$? Welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: 1. $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$; 5, 4;

2. $y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{6}$; $\frac{7}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Desgl. von 24, 22 an $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$?

Antw.: 1. $y = \frac{5}{4}x - 8$; 10, $\frac{9}{2}$;

2. $y = \frac{13}{16}x + \frac{5}{2}$; $-\frac{104}{5}$, $-\frac{72}{5}$.

Die Zeichen der zweiten Tangente lassen erkennen, daß die Tangente den andern Zweig der Kurve berührt.

Desgl. von 10, 7 an $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$?

Antw.: 1. $y = \frac{13}{15}x - \frac{5}{3}$; 13, 9$\frac{3}{5}$;

2. $y = x - 3$; $\frac{25}{3}$, $\frac{16}{3}$.

13. Wie heißt die Gleichung der Tangente von dem Punkte 15,12 an die Hyperbel
$$\frac{(x-2)^2}{24} - \frac{(y-2)^2}{15} = 1?$$

Antw.: 1. $y = x - 3$; 10, 7;

2. $y = \frac{23}{29}x + \frac{3}{29}$; $\frac{190}{3}$, $\frac{151}{3}$.

14. Gegeben sind die Hyperbel $x^2 - y^2 = 32$ und der Kreis $x^2 + y^2 = 40$. Welchen Winkel bilden die Tangenten im Schnittpunkt?

Antw.: $T_h : y = 3x - 16$; $T_k : y = -3x + 20$; ± 6, ± 2; $\vartheta = 36^0\ 52'\ 11''$.

Desgl. die Hyperbel $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{27} = 1$ und der Kreis $(x-3)^2 + y^2 = 162$.

Antw.: I. $T_h : y = x - 3$; $T_k : y = -x + 21$; 12, ± 9; $\vartheta = 90^0$.

II. $T_h : y = -\frac{5}{17}\sqrt{17}x - \frac{21}{17}\sqrt{17}$; $T_k : y = \frac{9}{17}\sqrt{17}x + \frac{99}{17}\sqrt{17}$; $-\frac{60}{7}$, $\pm\frac{9}{7}\sqrt{17}$; $\vartheta = 64^0\ 7'\ 22''$.

15. Gegeben ist die Hyperbel $x^2 - 2y^2 = 18$

und die Parabel $y^2 = \frac{3}{2}x$. In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sie sich?

Antw.: $6, \pm 3$. $T_k : y = x - 3$; $T_p : y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$; $\vartheta = 30^0\ 57'\ 50''$.

16. Gegeben ist die Hyperbel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Wie heißt die Ellipse, die dieselben Brennpunkte hat und die Hyperbel in den Punkten $\pm\frac{52}{3}, \pm\frac{36}{5}$ schneidet? Wie lauten die Tangenten im Schnittpunkt?

Antwort: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; $T_h : y = \frac{13}{16}x - \frac{5}{4}$; $T_e : y = -\frac{16}{13}x + 20$.

17. Um den einen Scheitel der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 9$ ist mit dem Radius $r = \frac{24}{\sqrt{41}}$ der Kreis beschrieben. Wie lauten die gemeinsamen Tangenten, und welches sind die Berührungspunkte?

Antw.: Ist der rechte Scheitel der Mittelpunkt, so gilt $y = \mp\frac{5}{4}x \mp \frac{9}{4}$; $-5, \pm 4$; $\frac{3}{41}, \mp\frac{96}{41}$.

18. Gegeben sind die Hyperbel $x^2 - 2y^2 = 16$ und die Parabel $y^2 = 3x$. Wie lauten die gemeinsamen Tangenten? Welches sind die Berührungspunkte?

Antwort:

$y = \mp\frac{3}{4}x \mp 1$; $-12 - 2\sqrt{30}, \pm 8 \pm \frac{3}{2}\sqrt{30}$; $\frac{4}{3}, \mp 2$.

19. Wie heißen die Asymptoten der Hyperbel $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$? Wie heißt die Gleichung des Umkreises für das Dreieck, das die Tangente im Punkte $8\frac{1}{4}, 4$ mit den Asymptoten bildet?

Antw.: $y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$ und $y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$.

$$K:\ \left(x - \frac{57}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{155}{32}\right)^2 = \left(\frac{205}{32}\right)^2$$

20. Die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = 9$ und der Durchmesser $y = \frac{3}{5}x$ sind gegeben. Wie heißt der konjugierte Durchmesser? Welcher schneidet die Hyperbel? In welchen Punkten?

Antw.: $y = \frac{5}{3}x$; der erste schneidet in $\pm\frac{15}{4}, \pm\frac{9}{4}$.

21. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn die Grundlinie $BC = a$ fest ist und die Differenz der beiden anderen Seiten gleich d ist?

Antw.: Ist BC die X-Achse, der Halbierungspunkt der Koordinatenanfangspunkt, so ist

$$\frac{4x^2}{d^2} - \frac{4y^2}{a^2 - d^2} = 1.$$

22. Welches ist der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn die Grundlinie $BC = a$ fest ist und $\sphericalangle\beta = 2\sphericalangle\gamma$ ist?

Antw.: Ist das Koordinatensystem wie vorher, so ist

$$\frac{9\left(x - \frac{a}{6}\right)^2}{a^2} - \frac{3y^2}{a^2} = 1.$$

23. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und außerhalb Punkt $a, 0$. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch $a, 0$ gehen und den gegebenen Kreis ausschließend berühren?

Antw.: $$\frac{4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{r^2} - \frac{4y^2}{a^2 - r^2} = 1.$$

Gemeinsame Gleichung der Kegelschnitte.

Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von dem Punkte F εmal so weit entfernt sind wie von der Geraden L?

Antw.: Teilt der Koordinatenanfangspunkt die Senkrechte von F auf L im Verhältnis $\varepsilon : 1$, und ist die Senkrechte gleich p', so gilt

$$y^2 = x^2(\varepsilon^2 - 1) + 2\varepsilon p' x.$$

Die Gleichung stellt dar
eine Parabel, wenn $\varepsilon^2 - 1 = 0$, Scheitel im Anfangsp.
eine Ellipse, wenn $\varepsilon^2 - 1 < 1$, linker Scheitel im „
eine Hyperbel, wenn $\varepsilon^2 - 1 > 1$, rechter Scheitel im „

Setzt man $\varepsilon p' = p$, so wird

für $\varepsilon = 1$ $\quad y^2 = 2px$

für $\varepsilon < 1$ $\quad \frac{\left(x - \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}} = 1,$

für $\varepsilon > 1$ $\quad \frac{\left(x + \frac{p}{\varepsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{\varepsilon^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{p^2}{\varepsilon^2-1}} = 1.$

Welchen Kegelschnitt beschreibt demnach ein Punkt, der durch die Punkte 18, 3 und 16, 4 geht?

Antw.: $\frac{(x-10)^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1,$

der durch die Punkte $\frac{5}{4}$, 3 und 8, $9\frac{3}{5}$ geht?

Antw.: $\frac{(x+5)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1,$

der durch die Punkte 6, 4 und 24, 8 geht?

Antw.: $y^2 = \frac{8}{3}x,$

der durch die Punkte 1, $\frac{9}{4}$ und 4, $3\sqrt{3}$ geht?

Antw.: $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$

der durch die Punkte 3, 6 und 12, 12 geht?

Antw.: $y^2 = 12x,$

der durch die Punkte 12, $\frac{9}{2}$ und 15, $\frac{9}{8}\sqrt{5}$ geht?

Antw.: $\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{y^2}{27} = 1.$

Druck von Hallberg & Büchting (Inh. L. A. Klepzig), Leipzig.